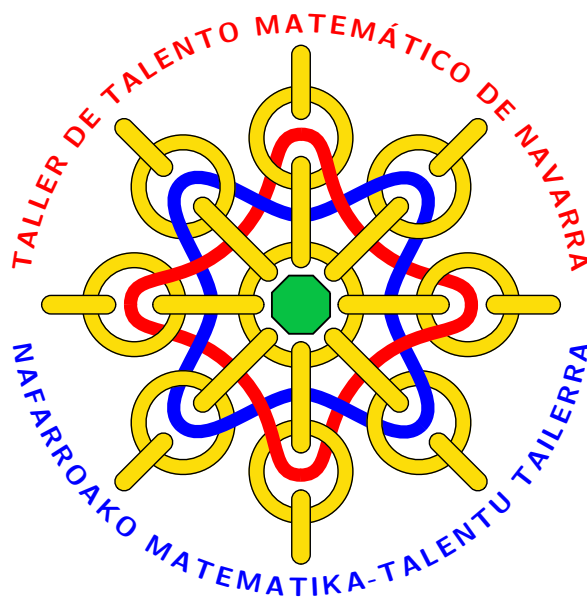


COMPETICIÓN MATEMÁTICA POR EQUIPOS

TALDEKAKO MATEMATIKA TXAPELKETA



Taller de Talento Matemático de Navarra
Nafarroako Matematika Talentu Tailerra

Pamplona, 27 de febrero 2026

Iruñean, 2026ko otsailaren 27a

Aquí tenéis **ocho problemas** para resolverlos. Todos los problemas han sido seleccionados a partir de la colección del «*Rally Mathématique sans Frontières*», competición organizada por la profesora M^a Ángeles Arroyo García para el Taller de Talento Matemático de Aragón.

Instrucciones para los participantes

1. Los alumnos y alumnas pueden organizarse como quieran para trabajar en grupo.
2. Los profesores están presentes pero no intervienen en ningún momento, salvo para aclarar dudas sobre la redacción de los enunciados.
3. El material siguiente está autorizado: regla, compás, escuadra y cartabón, transportador de ángulos, diccionario, tijeras, pegamento, hojas en sucio, calculadora.
4. Las respuestas deben anotarse en la «Hoja de respuestas».

Por contra, el uso de internet y teléfonos móviles está estrictamente prohibido.

Cada problema se puntúa sobre **2 puntos**. La puntuación máxima posible es **16 puntos**.

Hona hemen ebazteko **zortzi buruketa**. Buruketa guztiak «*Rally Mathématique sans Frontières*» bildumatik aukeratuak izan dira, M^a Ángeles Arroyo García irakasleak Aragoiko Matematika Talentu Tailerrera antolatutako txapelketa bat.

Parte-hartzaileentzako jarraibideak

1. Irakasleak nahi duten moduan antola daitezke taldeka lan egiteko.
2. Irakasleak bertan daude, baina ez dute inolaz ere esku hartzen, enuntziatuei buruzko zalantzak argitzeko izan ezik.
3. Ondorengo materiala erabiltzea baimenduta dago: erregela, konpasa, eskuaira eta kartaboia, angelu-neurgailua, hiztegia, guraizeak, kola, zirriborro orriak, kalkulagailua.
4. Erantzunak «Erantzun-orrian» idatzi behar dira.

Aitzitik, Internet eta telefono mugikorrek erabiltzea erabat debekatuta dago.

Buruketa bakoitza **2 punturekin** puntuatzen da. Gehienez **16 puntu** lor daitezke.

Problema 1 (Con la música a otra parte). Una orquesta está compuesta por 16 jóvenes, el número de chicas es mayor que el número de chicos. Dos amigos, Lucía y Nicolás, forman parte de la orquesta y, cuando faltan a un ensayo, el número de chicas y de chicos presentes son, respectivamente, las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un número entero.

¿Cuántos chicos y chicas forman la orquesta?

Solución. Como hay más chicas que chicos, de los 16 jóvenes que componen la orquesta, al menos 9 son chicas. Como al faltar un chico y una chica el número de chicos y chicas restantes pueden considerarse números de una terna pitagórica mayores que cero, el número de chicos inicial es mayor o igual a 2. Podemos analizar las posibilidades en la siguiente tabla, donde $A \equiv n^\circ$ de chicas inicial y $O \equiv n^\circ$ de chicos inicial.

A	O	$A - 1$	$O - 1$	$\sqrt{(A - 1)^2 + (O - 1)^2}$
9	7	8	6	10
10	6	9	5	$\sqrt{106}$
11	5	10	4	$\sqrt{116}$
12	4	11	3	$\sqrt{130}$
13	3	12	2	$\sqrt{148}$
14	2	13	1	$\sqrt{170}$

Vemos que el único resultado entero es 10, siendo la terna pitagórica 8, 6 y 10. Por tanto, inicialmente **había 9 chicas y 7 chicos**. □

1. buruketa (Musikarekin beste norabait) Orkestra bat 16 gaztez osatuta dago eta nesken kopurua mutilena baino handiagoa da. Bi lagun, Lucía eta Nicolás, orkestrako kide dira eta, entsegu batera faltatzen direnean, bertan dauden neska eta mutilen kopurua, hurrenez hurren, hipotenusa zenbaki oso bat duen triangelu angeluzuzen baten katetoen luzerak dira.

Zenbak neska-mutilek osatzen dute orkestra?

Ebazpena. Neskak mutilak baino gehiago direnez, orkestra osatzen duten 16 gazteetatik, gutxienez 9 neskak dira. Mutil eta neska bana falta direnean, gainerako neska-mutilen kopuruek zero baino handiagoak diren hiruko pitagorikoak osatzen dituztela suposa dezakegunez, hasierako mutilen kopurua 2 edo handiagoa dela ondoriozta dezakegu. Hurrengo taulan aukera guztiak aztertuta ditzakegu, non $A \equiv$ hasierako nesken kopurua eta $O \equiv$ hasierako mutilen kopurua diren.

A	O	$A - 1$	$O - 1$	$\sqrt{(A - 1)^2 + (O - 1)^2}$
9	7	8	6	10
10	6	9	5	$\sqrt{106}$
11	5	10	4	$\sqrt{116}$
12	4	11	3	$\sqrt{130}$
13	3	12	2	$\sqrt{148}$
14	2	13	1	$\sqrt{170}$

Eraitza oso bakarra 10 dela ikus dezakegu, sortzen den hiruko pitagorikoa 8, 6 eta 10 izanik. Beraz, hasiera batean **9 neska eta 7 mutil zeuden**. ☐

Problema 2 (¡Sorprendente!). En un producto de dos números se aumenta el primer factor en un 10 % y se disminuye el segundo en un 10 %.

¿En qué porcentaje varía el producto? (Indicar también si aumenta o disminuye).

Solución. Llamamos xy al producto inicial. Si el primer número x aumenta en un 10 %, esto equivale a multiplicarlo por 1,1. El segundo, y , disminuye un 10 %, lo que equivale a multiplicarlo por 0,9. Por tanto, el producto final queda

$$1,1 \cdot x \cdot 0,9 \cdot y = 0,99 \cdot xy.$$

Multiplicar por 0,99 supone una **disminución del 1 %**. **El precio producto final es el 99 % del precio del producto inicial.** ☐

2. buruketa (Harrigarria!) Bi zenbakiko biderketa batean, lehen biderkagaia % 10 handitzen da, eta bigarrena % 10 txikitzen da.

Zer ehunekotan aldatzen da biderkadura? (Era berean, adierazi gora edo behera egiten duen).

Ebazpena. Hasierako biderkadura xy izendatuz, lehen zenbakia, x , % 10 handitzen bada, 1,1-ekin biderkatu behar dugu. Bigarrena, y , % 10 txikitzen bada, 0,9-ekin biderkatu behar dugu. Beraz, amaierako biderkadura

$$1,1 \cdot x \cdot 0,9 \cdot y = 0,99 \cdot xy.$$

0,99-rekin biderkatzeak **% 1-eko murrizketa dakar**. **Amaierako biderkaduraren prezioa hasierako biderkaduraren prezioaren % 99-a da.** ☐

Problema 3 (No te pongas nervioso...). Un participante del Rally está un poco nervioso y se dedica a cortar papel. Coge una hoja de papel y la corta en diez trozos (1^{er} paso), después coge uno de estos trozos y lo vuelve a cortar en diez trozos (2^o paso), y así sucesivamente. (En cada paso coge uno de los trozos y lo corta en diez.)

¿Al cabo de cuántos pasos obtendrá 2026 trozos? (Puede cortar trozos muy pequeños).

Solución. Cada vez que se divide en 10 trozos, se coge uno para continuar cortándolo, por lo que quedan 9 trozos fijos. Sólo al final, cuando no sigamos cortando, tendremos 10 trozos. Esto quiere decir que $9 + 9 + 9 + 9 + \dots + 10 = 2026$. Así, si suponemos que se han realizado n pasos,

$$(n - 1) \cdot 9 + 10 = 2026$$

$$9n - 9 + 10 = 2026$$

$$9n = 2025$$

$$n = 225.$$

Por tanto, harán falta **225 pasos**. □

3. buruketa (Ez zaitez urduritu...) Rallyko partaide bat urduri samar dago eta paper bat mozten hasten da. Paperezko orri bat hamar zatitan mozten du (1go urratsa); gero, zati horietako bat hartzen du, eta berriro hamar zatitan mozten du (2. urratsa), eta horrela jarraitzen du behin eta berriz. (Urrats bakoitzean zati bat hartu eta hamar zatitan mozten du).

Zenbat urratsen buruan lortuko ditu 2026 zati? (Oso zati txikiak moztu ditzake).

Ebazpena. Orria 10 zatitan banatzen den bakoitzean, zati bat hartzen da mozten jarraitzeko; beraz, 9 zati finko geratzen dira. Amaieran bakarrik, mozten jarraitzen ez dugunean, 10 zati izango ditugu. Horrek esan nahi du $9 + 9 + 9 + 9 + \dots + 10 = 2026$. Horrela, n urrats egin direla suposatzen badugu,

$$(n - 1) \cdot 9 + 10 = 2026$$

$$9n - 9 + 10 = 2026$$

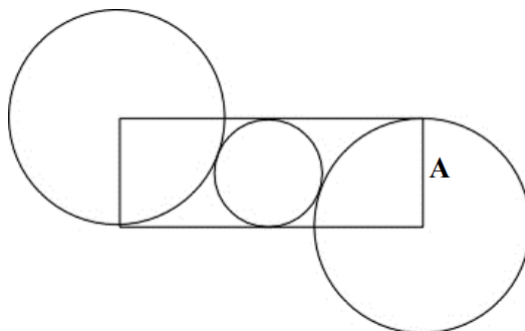
$$9n = 2025$$

$$n = 225.$$

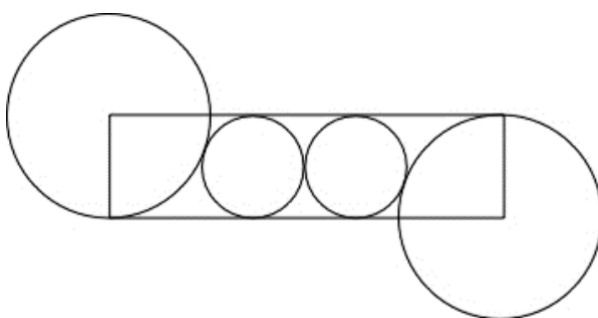
Beraz, **225 urrats** egin beharko dira. □

Problema 4 (Rectángulos y círculos).

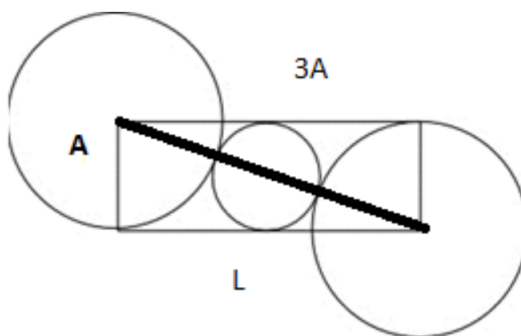
- a) Sea L la longitud del rectángulo y A su anchura. ¿Cuál es el valor exacto de la relación $\frac{L}{A}$?



- b) Encuentra la misma relación para esta otra figura.



Solución. a) Observamos que el segmento que une los tres centros de la circunferencia mide $3A$. Si llamamos L al lado horizontal del rectángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo de catetos A y L y de hipotenusa $3A$. Así, $A^2 + L^2 = (3A)^2$, de donde $L^2 = 8A^2$.



Por tanto, obtenemos que $L = \sqrt{8}A$. La proporción $\frac{L}{A}$ es

$$\frac{L}{A} = \frac{\sqrt{8}A}{A} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,828$$

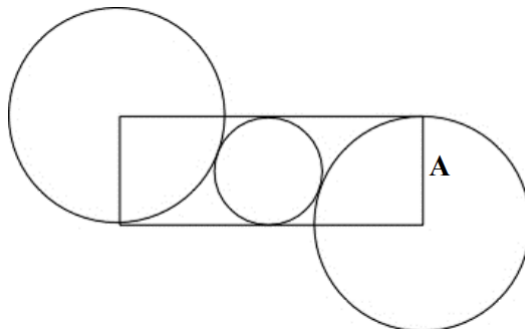
b) En este segundo caso L , aumenta un radio A con respecto al apartado anterior. Por tanto, $L = \sqrt{8}A + A = (\sqrt{8} + 1)A$. La proporción será

$$\frac{L}{A} = \frac{(\sqrt{8} + 1)A}{A} = \sqrt{8} + 1 = (2\sqrt{2} + 1) \approx 3,828.$$

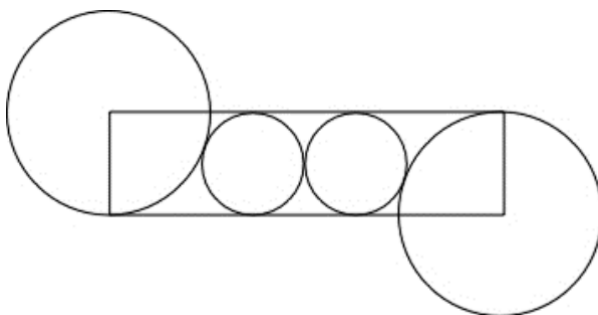
□

4. buruketa (Laukizuzenak eta zirkuluak)

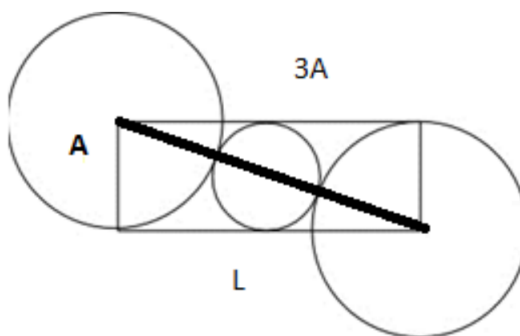
- a) Izan bedi L laukizuzenaren luzera eta A bere zabalera. Zein da $\frac{L}{A}$ adierazpenaren balio zehatza?



- b) Aurkitu aurreko adierazpen berdinen balioa ondorengo irudi honentzako.



Ebazpena. a) Zirkunferentziaren hiru zentroak lotzen dituen segmentuak $3A$ neurtzen ditu. Laukizuzenaren alde horizontalari L deitzen badiogu, Pitagorasek teorema aplikatu diezaiokegu A eta L katetoak eta $3A$ hipotenusa dituen triangeluari. Horrela, $A^2 + L^2 = (3A)^2$, eta hortik $L^2 = 8A^2$.



Beraz, $L = \sqrt{8}A$ dela ondorioztatzen dugu. $\frac{L}{A}$ adierazpenaren balioa ondorengoa da:

$$\frac{L}{A} = \frac{\sqrt{8}A}{A} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,828$$

b) Bigarren kasu honetan, L luzera A erradio batez luzatzen da, aurreko kasuarekin konparatuta. Beraz, $L = \sqrt{8}A + A = (\sqrt{8} + 1)A$. Adierazpenaren balioa ondorengoa izango da:

$$\frac{L}{A} = \frac{(\sqrt{8} + 1)A}{A} = \sqrt{8} + 1 = (2\sqrt{2} + 1) \approx 3,828.$$

□

Problema 5 (Tres casillas a tener en cuenta). Colocar en cada una de las casillas vacías un número entero de forma que cada uno de los números intermedios sea igual a la media de los dos que tiene a cada lado.

5			26	
---	--	--	----	--

Solución. Si lo resolvemos por progresiones aritméticas:

$a_1 = 5$	$a_2 = 5 + d$	$a_3 = 5 + 2d$	$a_4 = 26 = 5 + 3d$	$a_5 = 5 + 4d$
-----------	---------------	----------------	---------------------	----------------

Tenemos que $26 = 5 + 3d$, de donde $d = 7$. Por tanto, los números son:

5	12	19	26	33
---	----	----	----	----

Si lo resolvemos por ecuaciones: llamamos x al tercer número. Por tanto, entre 5 y x el número será $\frac{5+x}{2}$. Llamamos al último número y . Como 26 es la media de x e y ,

$$\frac{x+y}{2} = 26,$$

de donde $y = 52 - x$. Por tanto,

5	$\frac{5+x}{2}$	x	26	$52 - x$
---	-----------------	-----	----	----------

Se cumple que x es la media de los dos números entre los que se encuentra:

$$\frac{\frac{5+x}{2} + 26}{2} = x$$

$$\frac{5+x}{2} + 26 = 2x,$$

de donde $x = 19$. Sustituyendo, queda

5	12	19	26	33
---	----	----	----	----

lo que termina el problema. □

5. buruketa (Kontuan hartu beharreko hiru gelaxka) Gelaxka huts bakoitzean zenbaki oso bat jarri, bitarteko zenbaki bakoitza aldamenean dituen bi zenbakien batez bestekoaren berdina izan dadin.

5			26	
---	--	--	----	--

Ebazpena. Progresio aritmetikoak erabiliz ebazten badugu:

$a_1 = 5$	$a_2 = 5 + d$	$a_3 = 5 + 2d$	$a_4 = 26 = 5 + 3d$	$a_5 = 5 + 4d$
-----------	---------------	----------------	---------------------	----------------

$26 = 5 + 3d$ dela daukagu, eta ondorioz $d = 7$. Beraz, zenbakiak ondorengoak dira:

5	12	19	26	33
---	----	----	----	----

Ekuazioak erabiliz ebazten badugu: izan bedi x hirugarren zenbakia. Beraz, 5 eta x -ren artean $\frac{5+x}{2}$ egongo da. Azkenengo zenbakia y izendatuz, 26 zenbakia x eta y -ren batez bestekoa denez,

$$\frac{x + y}{2} = 26,$$

eta ondorioz, $y = 52 - x$. Beraz,

5	$\frac{5+x}{2}$	x	26	$52 - x$
---	-----------------	-----	----	----------

x bere aldameneko bi zenbakien batez bestekoa denez,

$$\frac{\frac{5+x}{2} + 26}{2} = x$$

$$\frac{5+x}{2} + 26 = 2x,$$

eta ondorioz, $x = 19$. Ordezkatuz, ondorengo lortzen dugu:

5	12	19	26	33
---	----	----	----	----

eta honekin buruketa amaitzen dugu. □

Problema 6 (El adoquín que quiere ser un cubo). Un adoquín *Pokémon* quiere evolucionar a cubo. La forma original del adoquín es la de un prisma recto de caras rectangulares (como un tetrabrik de leche). Si aumenta la arista más pequeña en 3 cm y disminuye la arista más grande en 5 cm, entonces se convierte en un cubo que conserva el volumen que tenía originalmente.

¿Cuál es la longitud de la arista del cubo?

Solución. Llamamos a , b y c a las dimensiones del prisma. Si c es la dimensión que no varía, ésta será la arista del cubo. Las otras dimensiones varían de manera que $a - 5 = b + 3 = c$. Por tanto, las dimensiones del prisma en función de la arista del cubo son $c + 5$, $c - 3$ y c . Dado que se cumple que tienen el mismo volumen,

$$V = (c + 5)(c - 3)c = c^3.$$

Operando, llegamos a $c(2c - 15) = 0$.

Como c es una longitud no nula, deducimos que $c = 7,5$ cm. □

6. buruketa (Kuboa izan nahi duen galtzada-harria) Galtzada-harri *Pokémon* batek kubo batera eboluzionatu nahi du. Galtzada-harriaren jatorrizko forma aurpegi laukizuzeneeko prisma zuzen batena da (esne-tetrabrik bat bezala). Ertz txikiena 3 cm handitzen bada eta ertz handiena 5 cm txikitzen bada, jatorrizko bolumena gordetzen duen kubo batean bihurtzen da.

Zein da kuboaren ertzaren luzera?

Ebazpena. Prismaren neuriei a , b eta c deitzen diegu. caldatzen ez den dimentsioa bada, kuboaren ertza izango da. Beste dimentsioak ondorengo erlazioa errespetatuz aldatzen dira: $a - 5 = b + 3 = c$. Beraz, prismaren dimentsioak, kuboaren ertzaren arabera, $c + 5$, $c - 3$ eta c dira. Bolumen bera dutenez,

$$V = (c + 5)(c - 3)c = c^3.$$

Hau garatuz $c(2c - 15) = 0$ daukagu.

c luzera ez nulua denez, $c = 7,5$ cm ondorioztatzen dugu. □

Problema 7 (Viaje a la Isla Mauricio). Antes de su marcha hacia Isla Mauricio, un turista proveniente de África del Sur ha buscado en Internet los tipos de cambio que se aplican en el día entre las diferentes monedas. Ha encontrado que:

$$1 \text{ Euro} = 9,2117 \text{ ZAR}, \quad 1 \text{ USD} = 28,2 \text{ MUR} \quad \text{y} \quad 1 \text{ Euro} = 1,067 \text{ USD}.$$

(ZAR: Rand Sudafricana, USD: Dólar EEUU, MUR: Rupia de la Isla Mauricio).

A su llegada a la Isla Mauricio cambia 500 Rands en Rupias.

¿Cuántas Rupias puede comprar?

Solución. Tenemos que

$$1 \text{ ZAR} = \frac{1 \text{ EUR}}{9,2117} = \frac{1,067 \text{ USD}}{9,2117} = \frac{1,067 \cdot 28,2 \text{ MUR}}{9,2117} = 3,266432906 \text{ MUR}$$

Así, $500 \text{ ZAR} = 500 \cdot 3,266432906 = 1\,633,2165 \text{ MUR}$.

Puede comprar 1633 rupias.



7. buruketa (Maurizio Uhartera bidaia) Maurizio Uhartera abiatu baino lehen, Hego Afrikatik etorritako turista batek txanpon ezberdinen artean egunean aplikatzen diren truke-tasak bilatu ditu Interneten. Honakoa aurkitu du:

$$\text{Euro } 1 = 9,2117 \text{ ZAR}, \quad \text{USD } 1 = 28,2 \text{ MUR} \quad \text{eta} \quad \text{Euro } 1 = 1,067 \text{ USD}.$$

(ZAR: Rand Hegoafrikarra, USD: AEBko dolarra, MUR: Maurizio Uharteko Errupia).

Maurizio Uhartera iristean 500 Rand Errupietara aldatzen ditu.

Zenbat Errupia eros ditzake?

Ebazpena. Ondorengo daukagu:

$$1 \text{ ZAR} = \frac{1 \text{ EUR}}{9,2117} = \frac{1,067 \text{ USD}}{9,2117} = \frac{1,067 \cdot 28,2 \text{ MUR}}{9,2117} = 3,266432906 \text{ MUR}$$

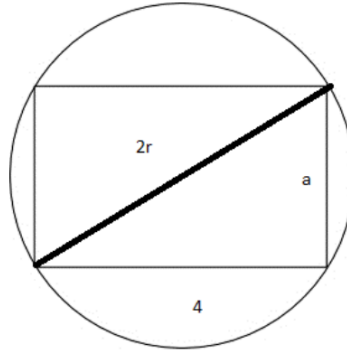
Beraz, $500 \text{ ZAR} = 500 \cdot 3,266432906 = 1\,633,2165 \text{ MUR}$.

1633 errupia eros ditzake.



Problema 8 (El rectángulo de oro). En la figura, el rectángulo inscrito en la circunferencia es un rectángulo de oro: la razón entre el lado grande y el pequeño es el número de oro $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Calcular el valor del área del círculo sabiendo que el lado grande del rectángulo mide 4 cm.



Solución. Aplicamos el teorema de Pitágoras

$$a^2 + 4^2 = (2r)^2.$$

Por otro lado, el lado pequeño del rectángulo, a , cumple

$$\frac{4}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Hallamos primero a :

$$a = \frac{8}{\sqrt{5} + 1} = \frac{8(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{8(\sqrt{5} - 1)}{4} = 2(\sqrt{5} - 1).$$

Sustituyendo en la primera ecuación, resulta

$$4(\sqrt{5} - 1)^2 + 16 = 4r^2$$

$$(\sqrt{5} - 1)^2 + 4 = r^2$$

$$6 - 2\sqrt{5} + 4 = r^2$$

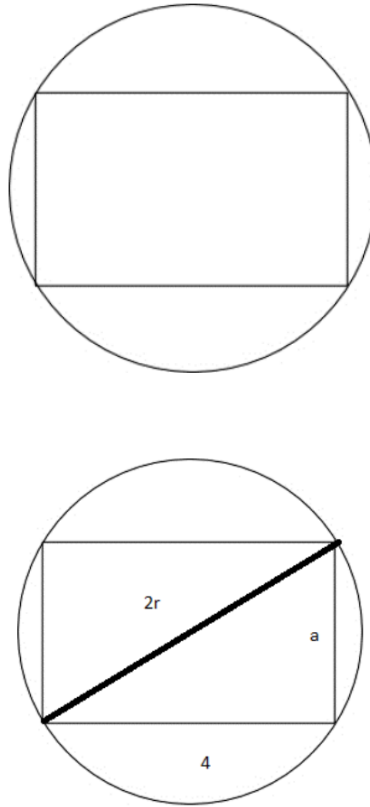
Así, el área del círculo es

$$S = \pi r^2 = \pi(10 - 2\sqrt{5})^2 = 2\pi(5 - \sqrt{5}) \approx 17,37 \text{ cm}^2.$$

□

8. buruketa (Urrezko laukizuzena) Irudian ikusten den zirkunferentzia inskribatutako laukizuzena urrezko laukizuzena da: alde handiaren eta txikiaren arteko zatidura urrezko zenbakia da $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Kalkulatu zirkuluaren azaleraren balioa, laukizuzenaren alde handiak 4 cm neurtzen duela jakinda.



Ebazpena. Pitagorasek teorema aplikatuz:

$$a^2 + 4^2 = (2r)^2.$$

Bestalde, laukizuzenaren a alde txikiak ondorengo betetzen du:

$$\frac{4}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Aurki dezagun lehenengo a -ren balioa:

$$a = \frac{8}{\sqrt{5} + 1} = \frac{8(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{8(\sqrt{5} - 1)}{4} = 2(\sqrt{5} - 1).$$

Lehenengo ekuazioan ordezkatzuz,

$$4(\sqrt{5} - 1)^2 + 16 = 4r^2$$

$$(\sqrt{5} - 1)^2 + 4 = r^2$$

$$6 - 2\sqrt{5} + 4 = r^2$$

Ondorioz, zirkuluaren azalera:

$$S = \pi r^2 = \pi(10 - 2\sqrt{5})^2 = 2\pi(5 - \sqrt{5}) \approx 17,37 \text{ cm}^2.$$

□